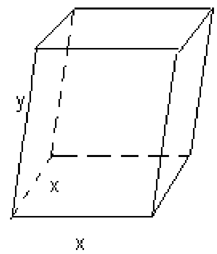
Ejercicio n° 1 de la opción A de septiembre de 2004

Ejercicio 1. [2'5 puntos] Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3 . Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 € / cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo

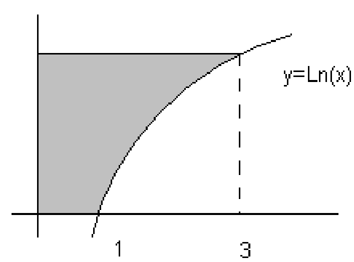
Solución



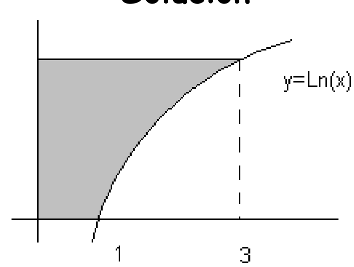
Capacidad = Volumen = $x^2.y$ = 80 cm^3
Superficie lateral + tapa = $x^2 + 4xy$
Superficie base = x^2
Coste superficie lateral + tapa a 1 € /cm^2
Coste superficie base a 1 € /cm^2 mas el 50% = 1 + 50/100 = 1 + 1/2 = 3/2 € /cm^2
Coste total = $(x^2 + 4xy).1 + x^2.(3/2) = (5/2)x^2 + 4xy$
Relación $x^2.y = 80$ de donde $y = 80/x^2$. Entrando en coste total
Coste total = $(5/2)x^2 + 4xy = (5/2)x^2 + 4x(80/x^2) = (5/2)x^2 + 320/x = C(x)$
Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos
$C'(x) = 5x - 320/x^2$
$C'(x) = 0$; $5x - 320/x^2 = 0$; $5x^3 = 320$; $x^3 = 64$, de donde $x = \sqrt[3]{64} = 4$
Veamos que es un mínimo con la 2ª derivada
$C''(x) = 5 + 640/x^3$, de donde C(4) = 5 + 640/64 = 15 > 0, luego es un mínimo.
Las dimensiones de la caja para un coste mínimo son x = 4 cm e $y = 80/(4^2) = 5$m

Ejercicio n° 2 de la opción A de septiembre de 2004

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Siendo Ln x el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada



Solución



De la figura, se observa, que el punto donde se corta la recta paralela al eje de abscisas, y la función y = Ln(x) es Ln(3), por tanto la recta paralela al eje de abscisas es y = Ln(3)

El área pedida es

Área = $\int_0^3$ Ln(3) dx - $\int_1^3$ Ln(x) dx = $\left[Ln(3).x\right]_0^3$ - $\left[xLn(x) - x\right]_1^3$ =
= [3.Ln(3) – 0] – [(3Ln(3) – 3) – (1Ln(1) – 1)] = 3Ln(3) – 3Ln(3) +3 – 1 = 2 unidades de área (u.a.)

$\int$ Ln(x) dx es una integral por partes

$\int$ Ln(x) dx = Ln(x).x - $\int$ x.(1/x) dx = Ln(x).x - $\int$ dx = Ln(x).x – x u = Ln(x); du = (1/x) dx

dv = dx; v = $\int$ dx = x

Ejercicio n° 3 de la opción A de septiembre de 2004

Ejercicio 3. [2’5 puntos] Determina a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ ax + by + z &= 4 \end{aligned}$$

tiene al menos dos soluciones distintas

Solución

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -x + y + 2z &= -1 \\ ax + by + z &= 4 \end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ a & b & 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada.

Si nos dicen que el sistema tiene dos soluciones tiene que tener infinitas, por tanto ha de ser un sistema compatible e indeterminado, y como la matriz de los coeficientes como máximo es de orden 3 solo nos queda que rango(A) = rango(A*) = 2, o bien rango(A) = rango(A*) = 1.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$, A ya tiene rango 2.

Como A no puede tener rango 3, $0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 5a - 3b + 4$

Como A* tiene que tener rango 3, $0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ a & b & 4 \end{vmatrix} = 5(4 - a)$

Resolviendo el sistema

5a - 3b + 4 = 0

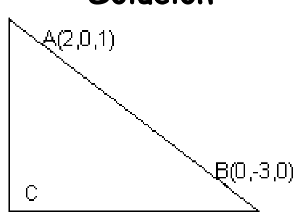
5(4 – a) = 0,

se obtiene a = 4 y b = 8

Ejercicio n° 4 de la opción A de septiembre de 2004

Ejercicio 4. [2’5 puntos] Se sabe que el triángulo ABC es rectángulo en el vértice C, que pertenece a la recta intersección de los planos y +z = 1 e y – 3z + 3 = 0, y que sus otros dos vértices son A(2,0,1) y B(0,-3,0). Halla C y el área del triángulo ABC

Solución



Como el punto C(x,y,z) pertenece a la intersección de las rectas y + z = 1 e y – 3z +3 = 0, ponemos ambas rectas en paramétricas para ver las coordenadas del punto C

Tomamos z = a, con lo cual y = 1 – a e y = -3 + 3a.

Igualamos y = y

1 – a = -3 + 3a

Resolviendo obtenemos a = 1, por tanto z = a = 1, e y = 1 – 1 = 1 – 1 = 0 y el punto C es C(x,y,z) = C(x,0,1)

Como me dicen que el triángulo es rectángulo en C el producto escalar (•) de los vectores **AC** y **BC** ha de ser cero, es decir **AC** • **BC** = 0

AC = (x – 2, 0, 0)

BC = (x , 3, 1)

AC • BC = 0 = (x – 2).x + 0 + 0 = 0 , de donde x = 0 y x = 2. Luego en principio tenemos dos puntos C_1 y C_2

Para x = 0, el punto es C_1 (0,0,1)
Como el triángulo es rectángulo su área es = 1/2.base.altura = 1/2.cateto.cateto = 1/2.||**AC**||.||**BC**||
AC = (-2,0,0)

BC = (0,3,1)

||**AC**|| = $\sqrt{2^2}$ = 2

||**BC**|| = $\sqrt{3^2+1^2}$ = $\sqrt{10}$

área = 1/2.||**AC**||.||**BC**|| = 1/2.2. $\sqrt{10}$ = $\sqrt{10}$ u.a.

Para x = 2, el punto es C_1 (2,0,1)
Como el triángulo es rectángulo su área es = 1/2.base.altura = 1/2.cateto.cateto = 1/2.||**AC**||.||**BC**||
AC = (0,0,0)

BC = (-2,3,1)

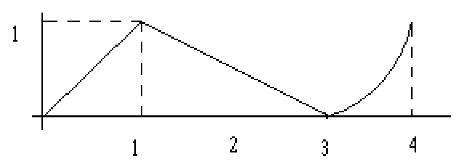
||**AC**|| = $\sqrt{0^2}$ = 0

||**BC**|| = $\sqrt{2^2+3^2+1^2}$ = $\sqrt{14}$

área = 1/2.||**AC**||.||**BC**|| = 1/2.0. $\sqrt{10}$ = 0 u.a., por tanto si no hay área no hay triángulo, y la solución x = 2 no es válida

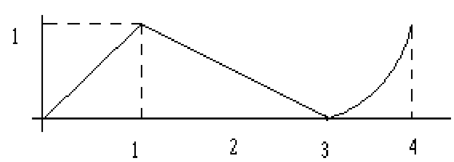
Ejercicio n° 1 de la opción B de septiembre de 2004

De una función f:[0,4] → $\Re$ se sabe que f(1) = 3 y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo



(a) [0’5 puntos] Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1
(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?
(c) [1 punto] Estudia la concavidad y la convexidad de f.

Solución



(a)
La recta tangente en x = 1 es y – f(1)= f ‘(1).(x – 1)
Nos dan f(1) = 3, y de la gráfica de la función f ‘(x) observamos que f ‘(1) = 1, por tanto la recta tangente pedida es y – 3= (1).(x – 1)
(b)
Para estudiar la monotonía estudiamos el signo de f ‘(x)
De la gráfica observamos que f ‘(x) ≥ 0 en [0,4] y por tanto la función siempre es creciente en (0,4), luego no tiene ni máximos ni mínimos relativos en (0,4).
De la gráfica observamos que f ‘(x) es continua por tanto f(x) es continua puesto que es derivable. Aplicando el Teorema de Weierstrass como f(x) es continua en el cerrado [0,4], f(x) alcanza su máximo y su mínimo absoluto en [0,4].
Los extremos absolutos se suelen alcanzar en las soluciones de f ‘(x) = 0, en este caso x = 3 (obsérvese la gráfica de f ‘(x)), los puntos donde no es continua ni derivable (no los hay) y en los extremos del intervalo, en nuestro caso x = 0 y x = 4.

Como antes hemos visto que la función siempre es creciente, el máximo absoluto lo tiene que alcanzar en x = 4.

(c)

Como f '(x) es creciente en (0,1), y es derivable, tenemos que f ''(x) > 0 en (0,1), luego f(x) es convexa ($\cup$) en (0,1)

Como f '(x) es decreciente en (1,3), y es derivable, tenemos que f ''(x) < 0 en (0,1), luego f(x) es cóncava ($\cap$) en (1,3)

Como f '(x) es creciente en (3,4), y es derivable, tenemos que f ''(x) > 0 en (3,4), luego f(x) es convexa ($\cup$) en (3,4)

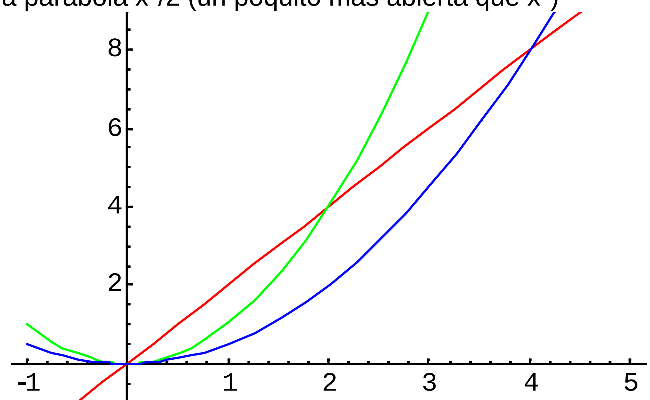
Por definición los punto x = 1 y x = 3 son puntos de inflexión

Ejercicio n° 2 de la opción B de septiembre de 2004

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la recta y = 2x y las curvas $y = x^2$ e $y = x^2/2$

Solución

Aunque no lo piden veamos las gráficas de las funciones 2x, x^2 y $x^2/2$, que son las de un recta que pasa por el origen, la parábola x^2 y la parábola $x^2/2$ (un poquito mas abierta que x^2)



En rojo la recta 2x, en verde la parábola x^2 y en azul la parábola $x^2/2$

Veamos los puntos de corte de 2x con x^2 y de 2x con $x^2/2$

$2x = x^2$; de donde $2x - x^2 = 0 = x(2 - x)$, y las soluciones son x =0 y x = 2

$2x = x^2/2$; de donde $2x - x^2/2 = 0 = x(2 - x/2)$, y las soluciones son x =0 y x = 4.

El área encerrada por las tres funciones es

$$\text{Área} = \int_0^2 (x^2 - x^2/2)\,dx + \int_2^4 (2x - x^2/2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_2^4 =$$

$$= (8/3 - 8/6) + [\,(16 - 64/6) - (\,4 - 8/6)] = 4 \text{ u.a.}$$

Ejercicio n° 3 de la opción B de septiembre de 2004

Ejercicio 3. (a) [1 punto] Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?

(b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Solución

(a)

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2 y $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \neq 0$, tenemos que $|A| = 0 =$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -15 - 3a = 0, \text{ de donde } a = -5$$

(b)

Para resolver el sistema de ecuaciones $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ para a = -5, que hemos obtenido en el apartado (a), es decir A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ (que ya sabemos que tiene rango 2), y el rango de la matriz ampliada A* = $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$. Como en A*, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ = 0, tenemos que rango(A*) = 2

Como rango(A) = rango(A*) = 2, el sistema es compatible e indeterminado. Tiene dos ecuaciones y dos incógnitas principales. Tomamos las dos primeras

3x – 2y + z = 1

x – 4y – 2z = 0

Tomando z = b, obtenemos

3x – 2y = 1 - b

x – 4y = 2b

Resolviéndolo obtenemos

x = 2/5 – (4/5)b e y = 1/10 – (7/10)b, luego la solución del sistema es (x,y,z) = (2/5 – (4/5)b, 1/10 – (7/10)b, b) con $b \in \Re$

Ejercicio nº 4 de la opción B de septiembre de 2004

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Halla la perpendicular común a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b-1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Solución

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = a \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = b \\ y = b-1 \\ z = -1 \end{cases}$$

De la recta r tomamos un punto A(1,1,0) y un vector director **u** = (0,0,1)

De la recta s tomamos un punto B(0,-1,-1) y un vector director **v** = (1,1,0)

La recta perpendicular (⊥) común a ambas rectas la vamos a dar como intersección de dos planos

$\pi_1 \equiv$ det(**x** – **a**, **u**, **u**x**v**) y $\pi_2 \equiv$ det(**x** – **b**, **v**, **u**x**v**) , siendo **u**x**v** el vector producto vectorial de **u** con **v**

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-1) - \mathbf{j}(-1) + \mathbf{k}(0) = (-1,1,0)$$

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x-1)(-1) - (y-1)(1) + z(0) = -x - y + 2 = 0$$

$$\pi_2 \equiv \det(\mathbf{x}-\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x & y+1 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x)(0) - (y+1)(0) + (z+1)(2) = 2z + 2 = 0$$

La recta pedida es $t \equiv \begin{cases} -x - y + 2 = 0 \\ 2z + 2 = 0 \end{cases}$